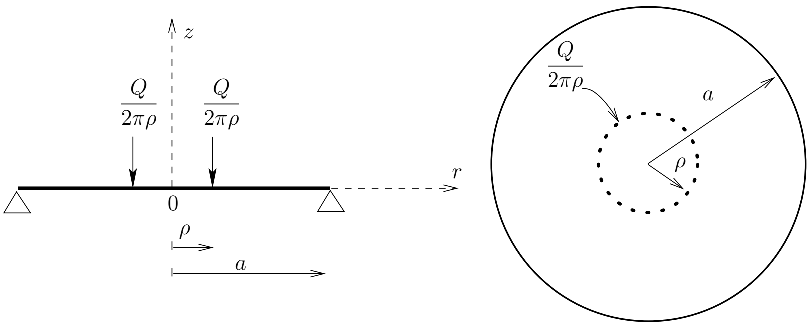
Corrigé du TD2[1]

Plaques circulaires et annulaires

Exercice 2 :



- L'équation de Lagrange : $\Delta(\Delta w) = 0 \Longrightarrow w = w_h$
- On détermine l'expression de la flèche suivant les deux cas : $\begin{cases} r < \rho & \text{on note } w'(r) \\ r > \rho & \text{on note } w''(r) \end{cases}$
- Pour $r < \rho$

$$w'(r) = A_1 \ln(r) + A_2 r^2 \ln(r) + A_3 r^2 + A_4$$

en $r = 0$ la flèche est finie $\Rightarrow A_1 = 0$
Indication : $T'_r(r) = 0$ or $T'_r(r) = \dfrac{4A_2 D}{r} \Rightarrow A_2 = 0$
$\Longrightarrow w'(r) = A_3 r^2 + A_4 \Longrightarrow 2$ inconnues.
- Pour $r > \rho$

$$w''(r) = B_1 \ln(r) + B_2 r^2 \ln(r) + B_3 r^2 + B_4$$

$B_{1\longrightarrow 4}$: 4 constantes inconnues.
- En tout on a 6 inconnues pour les déterminer il nous faut 6 équations.
- Selon l'indication, on a : $T''_r(r) = \dfrac{-Q}{2\pi r}$ (1)
- Les conditions aux limites :
en $r = a$ on a : $\begin{cases} w''(a) = 0 & (2) \\ M''_r(a) = 0 & (3) \end{cases}$
- La continuité (en $r = \rho$) de w, $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ donne :

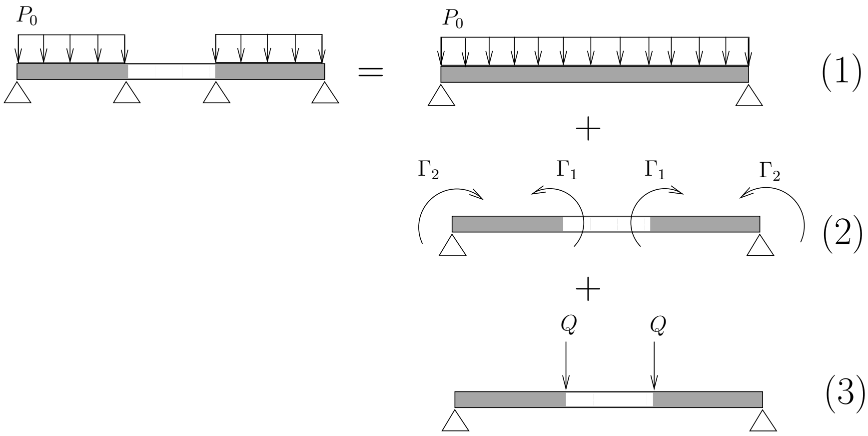
$$\begin{cases} w'(\rho) = w''(\rho) & (4) \\ \dfrac{\partial w'}{\partial r}(\rho) = \dfrac{\partial w''}{\partial r}(\rho) & (5) \\ \dfrac{\partial^2 w'}{\partial r^2}(\rho) = \dfrac{\partial^2 w''}{\partial r^2}(\rho) & (6) \end{cases}$$

1. slim.kammoun@enig.rnu.tn (A.U. 2014-2015)

– La résolution de ces équations permet de déterminer : A_3, A_4, B_1, B_2, B_3 et B_4.

EXERCICE 3 :

La solution $w(r)$ peut être calculée en utilisant la méthode de superposition. Dans ce cas le problème principal est décomposé en 3 problèmes préliminaires (déjà vus dans le cours) :



– La solution $w(r)$ est la somme des solutions des 3 problèmes (1), (2) et (3) : $w(r) = w^{(1)}(r) + w^{(2)}(r) + w^{(3)}(r)$. Le moment est calculé en faisant la somme des moments déterminés pour les 3 problèmes : $M_r(r) = M_r^{(1)}(r) + M_r^{(2)}(r) + M_r^{(3)}(r)$.
– Solutions des problèmes préliminaires (résultats du cours) :

Problème (1) : $$\begin{cases} w^{(1)}(r) = -\dfrac{P_0 a^4}{64D}\left[\dfrac{r^4}{a^4} - 2\left(\dfrac{3+\nu}{1+\nu}\right)\dfrac{r^2}{a^2} + \left(\dfrac{5+\nu}{1+\nu}\right)\right] \\ M_r^{(1)}(r) = \dfrac{P_0}{16}(3+\nu)(a^2 - r^2) \end{cases}$$

Problème (2) : $$\begin{cases} w^{(2)}(r) = \dfrac{1}{2}\dfrac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}\dfrac{\Gamma_1 b^2 - \Gamma_2 a^2}{(1+\nu)D} + \dfrac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\dfrac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{1-\nu}\ln(\dfrac{r}{a}) \\ M_r^{(2)}(r) = -\dfrac{\Gamma_1 b^2 - \Gamma_2 a^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{a^2 b^2}{r^2}\dfrac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{a^2 - b^2} \end{cases}$$

Problème (3) : $$\begin{cases} w^{(3)}(r) = -\dfrac{Qb}{4D}\left[A(a^2 - r^2) + r^2\ln(\dfrac{r}{a}) - B\ln(\dfrac{r}{a})\right] \\ M_r^{(3)}(r) = -\dfrac{Qb}{4}\left[2(1+\nu)(\ln(\dfrac{r}{a}) - A) + \dfrac{B}{r^2}(1-\nu) + (3+\nu)\right] \end{cases}$$

Avec

$$A = \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} + \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\ln(\frac{a}{b})$$
$$B = \frac{1+\nu}{(1-\nu)}\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}\ln(\frac{a}{b})$$

- On remarque que dans l'expression de la flèche $w(r)$ on a 3 inconnues qui sont : Γ_1, Γ_2 et Q. On verra dans la suite comment on les détermine.
- Les conditions aux limites du problème principal :

$$\text{en } r=a \text{ on a : } \begin{cases} w(a)=0 & (I) \\ M_r(a)=0 & (II) \end{cases} \text{(bord simplement appuyé)}$$
$$\text{en } r=b \text{ on a : } \begin{cases} M_r(b)=0 & (III) \\ w(b)=0 & (IV) \end{cases} \text{(bord simplement appuyé)}$$

- On remarque que la flèche en $r=a$ pour chaque problème préliminaire est nulle. Donc l'équation (I) est inutile pour la détermination des inconnues.

- $(II) \Rightarrow M_r(a) = \underbrace{M_r^{(1)}(a)}_{=0} + \underbrace{M_r^{(2)}(a)}_{=\Gamma_2} + \underbrace{M_r^{(3)}(a)}_{=0} = 0$, donc $\Gamma_2 = 0$

- $(III) \Rightarrow M_r(b) = \underbrace{M_r^{(1)}(b)}_{=\frac{P_0}{16}(3+\nu)(a^2-b^2)} + \underbrace{M_r^{(2)}(b)}_{=\Gamma_1} + \underbrace{M_r^{(3)}(b)}_{=0} = 0$,

  donc $\Gamma_1 = -\frac{P_0}{16}(3+\nu)(a^2-b^2)$

- $(IV) \Rightarrow$

$$w(b) = \underbrace{w^{(1)}(b)}_{=-\frac{P_0a^4}{64D}\left[\frac{b^4}{a^4}-2\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}\right)\frac{b^2}{a^2}+\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\right)\right]} + \underbrace{w^{(2)}(b)}_{=\frac{1}{2}\frac{\Gamma_1 b^2}{(1+\nu)D}-\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\frac{\Gamma_1}{1-\nu}\ln(\frac{b}{a})} + \underbrace{w^{(3)}(b)}_{=-\frac{Qb}{4D}\left[A(a^2-b^2)+(b^2-B)\ln(\frac{b}{a})\right]} = 0$$

  ,
  donc $Q = \cdots$