

Plan de la MMC 1

- Chapitre 1: Introduction à la MMC
& Rappel mathématique
- Chapitre 2: Théorie des contraintes
- Chapitre 3: Théorie des déformations
- Chapitre 4: Lois de comportement

Chapitre 1

Introduction à la MMC / Rappel mathématique

Plan du chapitre 1

- Introduction à la MMC
- Rappel sur le calcul matriciel
- Les tenseurs
- Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel
- Théorèmes intégrales de Gauss et de Stokes

Introduction à la MMC (Définition)

Mécanique :

Branche de la physique qui décrit les mouvements et les équilibres d'un système

Milieu :

A ne pas confondre avec « matériau ». La MMC est, dans un premier temps, une discipline « abstraite », capable de s'adapter à un grand nombre de situations. Elle se spécialisera seulement plus tard (mécanique du solide déformable, mécanique des fluides, etc.)

Continu :

On introduit ici la notion d'échelle d'observation, car tous les matériaux réels sont discontinus si on y regarde d'assez près.

La MMC est donc une modélisation mathématique du réel qui repose sur des hypothèses vérifiées dans des conditions données.

Introduction à la MMC (Définition)

Mécanique du point :

La plus simple des mécaniques « modernes », fondée sur les résultats de Newton.

Notions : masse, force

Mécanique du solide indéformable :

On ajoute une « forme » au système de mécanique du point, et donc un volume et une distribution de masse dans ce volume.

Notions : rotation, inertie, moment

Mécanique des milieux continus :

On ajoute la possibilité au système de changer de forme, ce qui implique des outils mathématiques beaucoup plus complexes.

Notions : déformations, contraintes, etc.

A.U.:2020-2021

6

Introduction à la MMC (Définition)

On dit souvent que la matière est sous l'un des trois états classiques :

solide, liquide, gazeux

Question : que faire des mots suivants :

fluide, pâteux, mou, épais, plastique, visqueux, etc.

Faut-il développer une théorie pour chacun de ces comportements ?

La réponse est non, car la MMC les couvre tous. En fait, dans un premier temps, la MMC n'a pas besoin de la notion de « consistance », et propose une modélisation mathématique commune à tous ces types de milieux.

On décrira cette consistance seulement dans un second temps, avec la notion de modèle de comportement, propre à chaque application dans le monde physique.

A.U.:2020-2021

7

Introduction à la MMC (Hypotèses)

La MMC est une mécanique dite « classique »

C-à-d

La MMC n'est pas « quantique »

L'échelle du problème est très grande devant la taille des particules élémentaires (atomes, électrons, etc.)

La MMC n'est pas « relativiste »

La vitesse de la matière dans le milieu d'étude est négligeable devant celle de la lumière.

L'échelle d'application de cette mécanique peut varier du nano –nanomètre- (ex. structure d'une fibre de carbone) au macro –mètre- (ex. Barrage).

A.U.:2020-2021

8

Introduction à la MMC (Hypotèses)

L'hypothèse principale de la MMC est nommée « hypothèse de continuité » :

Les propriétés de la matière (densité, rigidité, etc.) sont continues

L'intérêt de cette hypothèse (parfois contestable) est de pouvoir représenter mathématiquement toutes les grandeurs par des champs, continus et dérivables en temps et en espace.

Implication concrète de cette hypothèse :

La MMC ne s'intéresse qu'à des « moyennes locales »

Il est impossible de suivre le mouvement individuel de toutes les particules élémentaires d'un milieu. Par exemple, la pression appliquée par un fluide sur une paroi immergée est le résultat d'un très grand nombre d'impacts de particules. Pourtant, on la représente par un seul nombre, qui est l'effet moyen de ces collisions.

A.U.:2020-2021

9

Introduction à la MMC (Applications)

La MMC est partout :

En tant que théorie de la déformation de la matière, la MMC est absolument omniprésente dans les sciences de l'ingénieur. C'est un des langages communs de l'ingénierie.

Applications les plus évidentes :

- Procédés industriels (usinage, extrusion, etc.), industrie mécanique (aéronautique, automobile, etc.), biomécanique, matériaux composites, micromécanique, ...
 - Structures de génie civil, bâtiments, ponts, barrages, routes, ouvrages béton, acier, bois, etc.
 - Mécanique des fluides, aérodynamique, écoulements en canaux et conduites, écoulements fluviaux et souterrains
 - Géophysique, mécanique des sols, mécanique des roches
- Etc.

A.U.:2020-2021

10

Introduction à la MMC (Applications)

Avertissement :

La plupart de équations mathématiques de la MMC sont insolubles à la main car trop complexes, et même très souvent insolubles analytiquement.

C'est pourquoi, dans le cadre de ce cours :

On ne cherchera pas à résoudre des équations, mais seulement à les poser.

Bien entendu, les ingénieurs disposent d'une multitude de méthodes de résolutions approchées de ces équations. On en parlera brièvement à la fin du cours.

Pour l'essentiel, on va se concentrer sur la théorie, et non pas sur sa résolution concrète.

A.U.:2020-2021

11

Plan du chapitre

- Introduction à la MMC
- Rappel sur le calcul matriciel
- Les tenseurs
- Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel
- Théorèmes intégrales de Gauss et de Stokes

Rappel du calcul matriciel (Les matrices)

Matrice

Une matrice $m \times n$ est une représentation de nombres sous forme d'un tableau de m lignes et n colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Chaque élément est désigné par deux indices i, j qui correspondent à sa position dans le tableau.

Si $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, la matrice est dite carrée et si $\mathbf{m} = \mathbf{n} = 1$, elle se réduit à un scalaire. Les matrices sont très utiles pour résoudre simultanément les systèmes d'équations.

Système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Forme matricielle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Rappel du calcul matriciel (Les matrices)

Determinant

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre tel que :

si $A = [a_{ij}]$ est d'ordre 1 (1×1) :

$$\det(A) = a_{11}$$

si $A = [a_{ij}]$ est d'ordre 2 (2×2) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

si $A = [a_{ij}]$ est d'ordre 3 (3×3) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

etc...

A.U.:2020-2021

14

Rappel du calcul matriciel (Les matrices)

Inverse d'une matrice (méthode des cofacteurs)

Critère d'inversibilité : une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0.

Soit A une matrice carrée $n \times n$ de déterminant non nulle : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\text{Alors} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ou les coefficients A_{ij} sont les **déterminants** des comatrices associées à A

multipliés par $(-1)^{i+j}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{x(-1)^{1+1}} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{x(-1)^{1+2}} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A.U.:2020-2021

15

Rappel du calcul matriciel (Les matrices)

Inverse d'une matrice (méthode des cofacteurs)

Exemple de calcul d'inverse d'une matrice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 32$$

$$A^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -4 & -16 & 12 \\ 20 & 0 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -4 & 20 & -4 \\ -16 & 0 & 8 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Rappel du calcul matriciel (Les matrices)

Opérations matricielles

A et B sont deux matrices de composantes a_{ij} et b_{ij} et m est un scalaire.

1. Egalité

Deux matrices du même ordre sont égales si et seulement si toutes leurs composantes sont égales une à une :

$$A = B : a_{ij} = b_{ij}$$

2. Transposée

$$B = A^T : b_{ij} = a_{ji}$$

3. Multiplication par un scalaire

$$B = mA : b_{ij} = ma_{ji}$$

4. Multiplication matricielle

$$C = AB : c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

5. Inversion matricielle

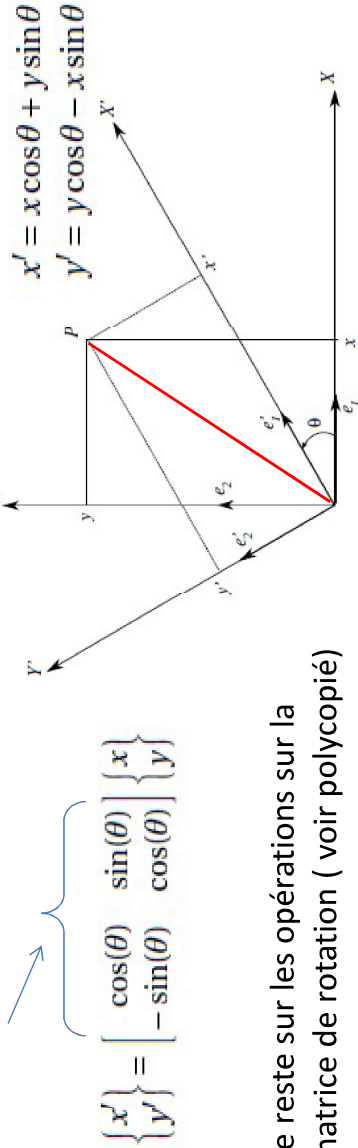
$$A^{-1} \text{ inverse de } A : AA^{-1} = I$$

Remarques

1. $AB \neq BA$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $\det(mA) \neq m\det(A)$

Rappel du calcul matriciel (Les matrices)

Matrice de rotation



Le reste sur les opérations sur la matrice de rotation (voir polycopié)

Transformation linéaire

$$x' = ax + by \quad ; \quad y' = cx + dy \quad \longrightarrow \quad \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \longrightarrow \quad V' = MV$$

M est la matrice de la transformation

Si x' est perpendiculaire à y' et x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 alors la matrice M est une matrice orthogonale.
 La longueur d'un vecteur ne change pas avec la rotation d'axes et on dit que la rotation est une transformation orthogonale $\longrightarrow MM^T = I$

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

Tenseurs

- Un tenseur est un mot générique d'entités mathématiques qui désigne une quantité physique.
- Les tenseurs sont la généralisation des scalaires, des vecteurs et des matrices.
- La description d'un tenseur dépend du repère de référence utilisé. Dans ce cours, on s'intéresse aux tenseurs cartésiens, le système de référence est donc un repère orthonormé (OXY Z) qui peut subir une rotation de matrice A et changer en un repère (OX'Y 'Z').

Ordre	Entité	Dimension	Nbr. Composantes	Notation
0	scalaire	2D	2 ⁰ = 1	a
		3D	3 ⁰ = 1	
1	vecteur	2D	2 ¹ = 2	a _i
		3D	3 ¹ = 3	
2	matrice	2D	2 ² = 4	a _{ij}
		3D	3 ² = 9	
n		2D	2 ⁿ	a _{ijk...}
		3D	3 ⁿ	

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

Propriétés des tenseurs

a) Symétrie

Un tenseur d'ordre $n > 2$ est dit symétrique par rapport à une paire d'indices si ses composantes restent inchangées sous l'effet d'une permutation de ces indices :

$V_{ijk...} = V_{jik...}$: symétrie par rapport à i, j , et

$V_{ijk...} = V_{ikj...}$: symétrie par rapport à j, k

b) Antisymétrie

Un tenseur d'ordre $n > 2$ est dit antisymétrique par rapport à une paire d'indices si ses composantes changent de signe sous l'effet d'une permutation de ces indices :

$V_{ijk...} = -V_{jik...}$: antisymétrie par rapport à i, j , et

$V_{ijk...} = -V_{ikj...}$: antisymétrie par rapport à j, k

c) Isotropie

Un tenseur est dit isotrope si ses composantes restent inchangées sous l'effet d'une rotation de repère. Exemple : le tenseur identité I : $I' = AIA^T = I$

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

Notation indicielle

BUT: une écriture compacte et allégée des expressions mathématiques.

Tenseur d'ordre 0	Scalaire	a, b, α	1 composante
Tenseur d'ordre 1	Vecteur	a_i, v_i, V_i	3 composantes
Tenseur d'ordre 2	Matrice	a_{ij}, v_{ij}, T_{ij}	9 composantes
Tenseur d'ordre 3		$a_{ijk}, v_{ijk}, T_{ijk}$	27 composantes
Tenseur d'ordre 4		$a_{ijkl}, v_{ijkl}, D_{ijkl}$	81 composantes

→ Convention de somme

Si on considère la somme :

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

son écriture compacte usuelle est :

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad \text{ou} : S = \sum_{j=1}^n a_j x_j \quad \text{ou bien} : S = \sum_{m=1}^n a_m x_m$$

Les indices i, j et m sont appelés **indices muets** dans le sens où la valeur de S ne dépend pas de l'indice utilisé dans l'expression de la somme.

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

➤ La convention de somme d'Einstein: (*indice muet/indice libre*)

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad \rightarrow \quad S = a_i x_i$$

Lorsqu'un indice est répété (apparaît 2 fois) dans un même terme, ça implique une somme sur l'indice répété.

- L'indice i est un **indice muet** → S ne dépend pas de l'indice i dans l'expression de la somme. (Produit scalaire des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{x}$).
- Un indice est dit indice libre s'il est répété de part et d'autre du signe égal (=) d'une équation.

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i$$

le vecteur $\mathbf{C}$ est la somme des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{X}_j$$

Le vecteur « $\mathbf{Y}$ » est obtenu par la multiplication de la matrice d'ordre 2 « $\mathbf{A}$ » par le vecteur « $\mathbf{X}$ ».

A.U.:2020-2021

22

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

Symbol de Kronecker

Le symbole *delta de Kronecker* est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les propriétés du symbole δ que nous allons rencontrer dans ce cours sont :

1. symétrie : $\delta_{ij} = \delta_{ji}$
2. isotropie : $\delta_{kl} = a_{ki} a_{lj} \delta_{ij} = \delta_{ij}$
3. trace : $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
4. produit avec un vecteur : $\delta_{ij} V_j = V_i$; $\delta_{ij} V_i = V_j$
particulièrement : $\mathbf{e}_i = \delta_{ij} \mathbf{e}_j$
5. produit scalaire des vecteurs unitaires : $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$
6. trace d'une matrice : $\delta_{ij} A_{ij} = A_{ii} = A_{jj}$

A.U.:2020-2021

23

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

Symbole de Permutation

Le symbole de permutation $\mathcal{E}$ est défini comme suit :

$$\mathcal{E}_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans l'ordre } 12312 \dots \\ -1 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans l'ordre } 32132 \dots \\ 0 & \text{si } ijk \text{ apparaissent dans un autre ordre} \end{cases}$$

on a :

$$\mathcal{E}_{123} = \mathcal{E}_{231} = \mathcal{E}_{312} = 1$$

et :

$$\mathcal{E}_{132} = \mathcal{E}_{321} = \mathcal{E}_{123} = -1$$

mais dès que l'un des indices est répété $\mathcal{E}$ prend la valeur nulle :

$$\mathcal{E}_{112} = \mathcal{E}_{122} = \mathcal{E}_{233} \dots = 0$$

Toute interchange dans les indices entraîne l'inversion de signe du symbole :

$$\mathcal{E}_{ijk} = -\mathcal{E}_{kji} = \mathcal{E}_{kij} = -\mathcal{E}_{ikj}$$

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

Opérations sur les tenseurs

- Somme de deux tenseurs de même ordre :

$$\text{tens. ordre } 1 \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \Leftrightarrow v_i = v'_i + v''_i$$

$$\text{tens. ordre } 2 \quad c = a + b \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\text{tens. ordre } 4 \quad C = A + B \Leftrightarrow C_{ijkl} = A_{ijkl} + B_{ijkl}$$

- Produit tensoriel " $\otimes$ " :

$$a^{(2)} = \vec{v} \otimes \vec{v}'' \Leftrightarrow a_{ij} = v'_i v''_j$$

$$C^{(3)} = a^{(2)} \otimes \vec{v} \Leftrightarrow C_{ijk} = a_{ij} v_k$$

$$D^{(4)} = a^{(2)} \otimes b^{(2)} \Leftrightarrow D_{ijkl} = a_{ij} b_{kl}$$

Vecteurs: à distinguer entre:

$$\text{— Produit tensoriel :} \quad a = \vec{v} \otimes \vec{v}'' \Leftrightarrow a = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v''_1 & v''_2 & v''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 v''_1 & v'_1 v''_2 & v'_1 v''_3 \\ v'_2 v''_1 & v'_2 v''_2 & v'_2 v''_3 \\ v'_3 v''_1 & v'_3 v''_2 & v'_3 v''_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{— Produit vectoriel :} \quad \vec{v} = \vec{v}' \wedge \vec{v}'' = \begin{pmatrix} v'_2 v''_3 - v'_3 v''_2 \\ -v'_1 v''_3 + v'_3 v''_1 \\ v'_1 v''_2 - v'_2 v''_1 \end{pmatrix}$$

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

Opérations sur les tenseurs

- Produit contracté(.) et doublement contracté (:)

▷ Le produit contracté (.)

$$s = \vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow s = u_i v_i$$

$$c^{(2)} = a^{(2)} \cdot b^{(2)} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

$$a^{(2)} \cdot \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a_{ij} u_j = v_i$$

$$\vec{u} \cdot a^{(2)} = \vec{v}' \Leftrightarrow u_i a_{ij} = v'_i$$

avec $\vec{v} \neq \vec{v}'$ si $a^{(2)}$ n'est pas sym.

Le résultat d'un produit contracté est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second ($m = 1$ pour un vecteur, **2** pour un tenseur d'ordre 2, ...). Le résultat d'un produit simplement contracté est un tenseur d'ordre **$n + m - 2$** .

Rappel du calcul matriciel (Les tenseurs)

Opérations sur les tenseurs

▷ Le produit doublement contracté (:)

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un scalaire :

$$s = a^{(2)} : b^{(2)} \Leftrightarrow s = a_{ij} b_{ij} \Leftrightarrow s = a_{ij} c_{ji} \Leftrightarrow s = \text{Trace}(a^{(2)} \cdot c^{(2)})$$

avec $c^{(2)}$ est la transposée de $b^{(2)}$: $c^{(2)} = {}^T b^{(2)} \Leftrightarrow b_{ij} = c_{ji}$.

(Explication : Soit $d^{(2)} = a^{(2)} \cdot c^{(2)} \Leftrightarrow d_{ij} = a_{ik} c_{kj}$ or $\text{Trace}(d^{(2)}) = d_{ii} = a_{ik} c_{ki}$)

Remarque : Le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre 2 anti-symétrique et un tenseur d'ordre 2 symétrique donne toujours le tenseur nul.

Le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 :

$$b^{(2)} = A^{(4)} : a^{(2)} \Leftrightarrow b_{ij} = A_{ijkl} a_{kl} \quad (12)$$

Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second. Le résultat d'un produit doublement contracté est un tenseur d'ordre **$n + m - 4$** .

Plan du chapitre

- Introduction à la MMC
- Rappel sur le calcul matriciel
- Les tenseurs
- **Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel**
- Théorèmes intégrales de Gauss et de Stokes

Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel

Différentiation d'un tenseur

- Différentiation d'un tenseur « $\mathbf{T}$ » d'ordre n par rapport au temps :

$$\frac{\partial T_{ij\dots}}{\partial t} \text{ ou } : \dot{\mathbf{T}}$$
- La différentiation spatiale par rapport à la coordonnée $\mathbf{x}_p$ est notée :

$$\frac{\partial T_{ij\dots}}{\partial x_p} \text{ ou } : \partial_p T_{ij\dots} \text{ ou bien } : T_{ij\dots,p}$$
- De même la dérivée partielle seconde par rapport à $\mathbf{x}_p$ et $\mathbf{x}_q$ est notée :

$$\frac{\partial^2 T_{ij\dots}}{\partial x_p \partial x_q} \text{ ou } : \partial_{pq} T_{ij\dots} \text{ ou bien } : T_{ij\dots,pq}$$

Cas d'un vecteur (Tenseur d'ordre 1)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V_1}{\partial t} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial V_2}{\partial t} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial V_3}{\partial t} \mathbf{e}_3 = V_{i,t} \mathbf{e}_i = \dot{V}_i \mathbf{e}_i$$

$$\frac{\partial(\lambda A)}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} A + \lambda \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(A \cdot B)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \cdot B + A \cdot \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(A \wedge B)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \wedge B + A \wedge \frac{\partial B}{\partial t}$$

Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel

Le gradient: (1/2)

L'opérateur **gradient** peut s'appliquer à des champs de tenseurs de différents ordres.

Il produira un champ de tenseurs dont l'ordre vaut celui du tenseur d'origine **plus un**. On dira donc que le gradient augmente l'ordre tensoriel d'une unité.

Le gradient est la traduction tridimensionnelle du concept de « pente » qui existe en deux dimensions. Il décrit la variation d'une grandeur selon les trois directions de l'espace.

Appliqué à un champ scalaire, le gradient produit donc un champ vectoriel de coordonnées :

$$(\overrightarrow{\text{grad}} f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Chaque coordonnée spatiale est donc la dérivée partielle du champ scalaire dans la direction correspondante. Le champ vectoriel résultant peut donc également s'écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

A.U.:2020-2021

30

Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel

Le gradient: (2/2)

On définit également l'opérateur gradient appliqué à un champ de vecteurs. Il s'agit d'un champ tensoriel d'ordre 2, dont les composantes sont :

$$(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{U})_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

Enfin, on définit l'opérateur gradient appliqué à un champ tensoriel d'ordre 2, qui produit un champ tensoriel du troisième ordre :

$$(\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} \vec{T})_{ijk} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}$$

On note que le nombre de « barres » sur l'opérateur renseigne sur l'ordre du champ résultant.

A.U.:2020-2021

31

Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel

La *divergence*:

Contrairement au gradient, l'opérateur ***divergence*** réduit l'ordre tensoriel d'une unité. Il produit donc un champ dont l'ordre tensoriel vaut celui d'origine moins un, et ne peut pas s'appliquer à un champ de scalaires.

Dans le cours, on l'appliquera surtout à des champs vectoriels. Dans ce cas, la divergence est la trace du gradient :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} \vec{U})$$

On en déduit que la divergence d'un champ vectoriel est un champ scalaire donné par la somme des dérivées partielles de ses composantes dans les trois directions de l'espace :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

La divergence peut aussi s'appliquer à un champ tensoriel, et produira alors un champ vectoriel de coordonnées :

$$(\operatorname{div} \vec{T})_i = \frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3} = \frac{\partial T_{ip}}{\partial x_p}$$

A.U.:2020-2021

32

Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel

Le *laplacien*:

Le **laplacien** (noté Δ) conserve l'ordre tensoriel du champ auquel il est appliqué, car c'est la composition d'une divergence et d'un gradient. Appliqué à un champ scalaire, on a donc :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

Le champ scalaire en résultat vaut donc :

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Le laplacien est la somme des dérivées secondes dans les trois directions de l'espace.

Cet opérateur peut aussi être appliqué à un champ vectoriel. Dans ce cas on a :

$$\vec{\Delta U} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{U})$$

Les coordonnées du champ vectoriel résultant sont :

$$(\vec{\Delta U})_i = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_p} \right)$$

A.U.:2020-2021

33

Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel

Le rotationnel:

Le rotationnel est un opérateur qui s'applique le plus souvent à un champs de vecteurs et conserve l'ordre tensoriel.

Les trois composantes du champ vectoriel résultant sont donc :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U})_1 &= \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U})_2 &= \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U})_3 &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\end{aligned}$$

Le rotationnel est très utilisé en mécanique des fluides (il décrit la notion de tourbillon), mais assez peu en mécanique du solide.

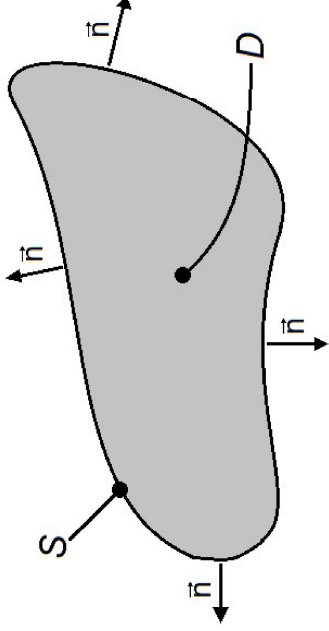
Plan du chapitre

- Introduction à la MMC
- Rappel sur le calcul matriciel
- Les tenseurs
- Champ tensoriel et différentiation d'un champ tensoriel
- Théorèmes intégrales de Gauss et de Stokes

Théorèmes intégrales de Gauss et de Stokes

On introduit ici la notion de **domaine**.

Un domaine D est une région de l'espace délimitée à un instant donné par une surface fermée S .



On suppose la surface S suffisamment régulière, et on définit le champ vectoriel $\vec{n}$, qui est le champ des vecteurs unitaires normaux à la surface et pointant vers l'extérieur.

$\vec{n}$ est appelé **normale sortante** à la surface S .

A.U.:2020-2021

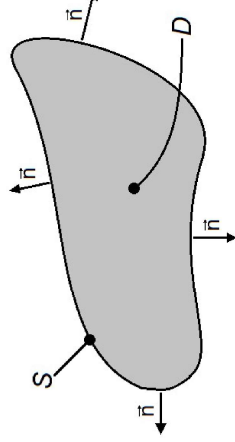
36

Théorèmes intégrales de Gauss et de Stokes

Les **formules de transformations d'intégrales** sont des outils mathématiques qui permettent de modifier la dimension d'un domaine d'intégration.

Les plus utilisées sont les **formules de Gauss et de Stokes**, qui servent à faire correspondre une intégrale sur D (intégrale de volume) à une intégrale sur S (intégrale de surface). On les donne ici sans démonstration, appliquées à des champs scalaire, vectoriel, ou tensoriel :

$$\begin{aligned}\int_D \overrightarrow{\text{grad}} f dv &= \int_S f \vec{n} dS \\ \int_D \text{div } \vec{U} dv &= \int_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS \\ \int_D \overrightarrow{\text{div}} \vec{T} dv &= \int_S \vec{T} \vec{n} dS\end{aligned}$$



Ces formules ont un intérêt calculatoire, mais auront aussi une forte signification lorsque champs représenteront des grandeurs physiques. Ces formules permettront d'écrire comment un comportement d'une grandeur dans un domaine à partir de son comportement à la surface.

A.U.:2020-2021

37