Corrigé de l'Ex 1 – TD1

Exercice 1 : Flexion cylindrique des plaques rectangulaires

On considère la plaque rectangulaire longue et étroite (bande infinie càd $a >> b$) de la figure 1, d'épaisseur h, dont les côtés de longueur a sont parallèles à l'axe (Ox) et ceux de longueur b sont parallèles à l'axe (Oy). Elle est simplement appuyée sur ses bords $y = 0$ et $y = b$.

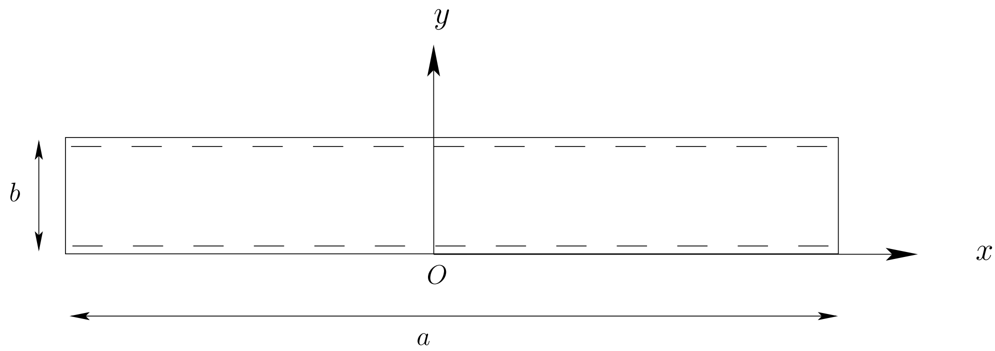

Figure 1 – Plaque rectangulaire longue simplement appuyée.

1) La plaque est soumise à un chargement transversal non uniforme $p(y)$:

$$p(y) = p_0 \sin(\frac{\pi y}{b})$$

On suppose que la plaque fléchie suivant une surface cylindrique admettant (Ox) pour direction de génératrice (hypothèse de flexion cylindrique).
a) Déterminer l'expression de la flèche $w(x, y)$ de la plaque.
Solution : $w(y) = -\frac{p_0 b^4}{\pi^4 D} \sin \frac{\pi y}{b}$ (corrigée en classe)

b) Exprimer les composantes du tenseur des contraintes dans la plaque.

Solution :

$$\sigma_{xx} = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{=0} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\frac{E z p_0 b^2 \nu}{(1-\nu^2)\pi^2 D} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{=0}\right) = -\frac{E z p_0 b^2}{(1-\nu^2)\pi^2 D} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2}(1-\nu)\underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}_{=0} = 0$$

$\sigma_{xz} = \frac{3T_x}{2h}(1-(\frac{2z}{h})^2) = 0$ car $T_x = D\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0$
$\sigma_{yz} = \frac{3T_y}{2h}(1-(\frac{2z}{h})^2) = \frac{3p_0 b}{2h\pi}(1-(\frac{2z}{h})^2)\cos\frac{\pi y}{b}$.
$\sigma_{zz} \approx 0$ d'après l'hypothèse de Kirchhoff.

c) Préciser les points où les contraintes (σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{yz}) sont maximales et donner les valeurs correspondantes ($\sigma_{xx,max}, \sigma_{yy,max}$ et $\sigma_{yz,max}$) pour $\nu = 1/3$.

Solution :
$\sigma_{xx,max} = -\frac{Ehp_0 b^2\nu}{2(1-\nu^2)\pi^2 D}\sin\frac{\pi y}{b}$ en $y = b/2$ et $z = -h/2$
$\sigma_{yy} = -\frac{Ehp_0 b^2}{2(1-\nu^2)\pi^2 D}$ en $y = b/2$ et $z = -h/2$
$\sigma_{yz} = \frac{3p_0 b}{2h\pi}$ en $y = b$ et $z = 0$

2) Considérons maintenant le cas de chargement uniforme d'intensité p_0 :

$$p(x,y) = p_0$$

On suppose que la plaque fléchie suivant une surface cylindrique admettant (Ox) pour direction de génératrice (hypothèse de flexion cylindrique).
a) Déterminer alors l'expression de la flèche $w(x,y)$.

Solution :
$w(y) = -\frac{p_0 b^4}{24D}\left[\left(\frac{y}{b}\right)^4 - 2\left(\frac{y}{b}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)\right]$

b) En déduire :
- la valeur maximale de la flèche w_{max} ,

Solution :
Flexion cylindrique suivant $(Ox) \Longrightarrow$ flèche maximale en $y = b/2$, d'où $w(b/2) = w_{max} = -\frac{5p_0 b^4}{384D}$.

- les valeurs maximales des moments et des contraintes.

Solution :
$M_y = D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p_0}{2}(y^2 - by)$.
$M_{y,\max} =?$
On résout l'équation $\frac{\partial M_y}{\partial y}(y) = 0$, on trouve $y = b/2$ d'où $M_{y,\max} = M_y(b/2) = \frac{p_0 b^2}{8}$.
$M_x = \nu M_y \Longrightarrow M_{x,\max} = \nu M_{y,\max} = \frac{p_0 b^2 \nu}{8}$.

$\sigma_{xx} = -\dfrac{M_x z}{I} \Longrightarrow \sigma_{xx,\max} = -\dfrac{M_{x,\max}(-\frac{h}{2})}{I} = \dfrac{p_0 b^2 h\nu}{16I}$.
$\sigma_{yy} = -\dfrac{M_y z}{I} \Longrightarrow \sigma_{yy,\max} = -\dfrac{M_{y,\max}(-\frac{h}{2})}{I} = \dfrac{p_0 b^2 h}{16I}$.
avec $I = \dfrac{h^3}{12}$: moment d'inertie unitaire.
$\sigma_{yz,\max} = \dfrac{3T_{y,\max}}{2h} =$ or $T_y = D\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} = -\dfrac{p_0}{2}(2y-b) \Rightarrow T_{y,\max} = \dfrac{p_0 b}{2}$, d'où $\sigma_{yz,\max} = \dfrac{3p_0 b}{4h}$.

c) Commenter.

Les résultats trouvés pour cette plaque (flèche et efforts intérieurs) correspondent bien à ceux d'une poutre (de longueur b et de section $1\times h$) simplement appuyée et chargée uniformément par $q = p_0 \times 1m$). La rigidité à la flexion D sera remplacée par EI