- **Somme de deux tenseurs de même ordre :**

$$
\begin{aligned}
\text{tens. ordre 1} \quad \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}'' \Leftrightarrow v_i = v'_i + v''_i && (1)\\
\text{tens. ordre 2} \quad \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} && (2)\\
\text{tens. ordre 4} \quad \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \Leftrightarrow C_{ijkl} = A_{ijkl} + B_{ijkl} && (3)
\end{aligned}
$$

- **Produit tensoriel "⊗" :**
On peut avoir un produit tensoriel de deux tenseurs de même ordre ou d'ordres différents. L'ordre du tenseur calculé est la somme des ordres des deux tenseurs.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^{(2)} &= \vec{v}' \otimes \vec{v}'' \Leftrightarrow a_{ij} = v'_i v''_j && (4)\\
\boldsymbol{C}^{(3)} &= \boldsymbol{a}^{(2)} \otimes \vec{v} \Leftrightarrow C_{ijk} = a_{ij} v_k && (5)\\
\boldsymbol{D}^{(4)} &= \boldsymbol{a}^{(2)} \otimes \boldsymbol{b}^{(2)} \Leftrightarrow D_{ijkl} = a_{ij} b_{kl} && (6)
\end{aligned}
$$

d'une manière générale : $F^{(m+n)} = P^{(m)} \otimes Q^{(n)}$.

Remarque : Il ne faut pas confendre entre un produit tensoriel et produit vectoriel !
Soit les vecteurs $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} v''_1 \\ v''_2 \\ v''_3 \end{pmatrix}$

— Produit tensoriel :
$\boldsymbol{a} = \vec{v}' \otimes \vec{v}'' \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v''_1 & v''_2 & v''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 v''_1 & v'_1 v''_2 & v'_1 v''_3 \\ v'_2 v''_1 & v'_2 v''_2 & v'_2 v''_3 \\ v'_3 v''_1 & v'_3 v''_2 & v'_3 v''_3 \end{bmatrix}$

— Produit vectoriel :
$\vec{v} = \vec{v}' \wedge \vec{v}'' = \begin{pmatrix} v'_2 v''_3 - v'_3 v''_2 \\ v'_3 v''_1 - v'_1 v''_3 \\ v'_1 v''_2 - v'_2 v''_1 \end{pmatrix}$

- **Produit contracté(.) et doublement contracté (:)** :

  ▷ *Le produit contracté (·) :*
  Le produit contracté de deux vecteurs est un scalaire :

$$ s = \vec{u} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow s = u_i v_i \quad \text{(c'est le produit scalaire.)} \qquad (7) $$

  Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 défini par :

$$ \boldsymbol{c}^{(2)} = \boldsymbol{a}^{(2)} \cdot \boldsymbol{b}^{(2)} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ik} b_{kj} \quad \text{(c'est le produit simple de deux matrices.)} \qquad (8) $$

  Le produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 "$\boldsymbol{a}^{(2)}$" et d'un vecteur "$\vec{u}$" est un vecteur, on peut post- ou pré-multiplié par un vecteur. Le résultat n'est pas le même à moins que $\boldsymbol{a}^{(2)}$ ne soit symétrique :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^{(2)} \cdot \vec{u} &= \vec{v} \Leftrightarrow a_{ij} u_j = v_i && (9)\\
\vec{u} \cdot \boldsymbol{a}^{(2)} &= \vec{v}' \Leftrightarrow u_i a_{ij} = v'_i && (10)
\end{aligned}
$$

$$\vec{v} \neq \vec{v}'$$

Le résultat d'un produit contracté est simple à définir. Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second ($m = 1$ pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2, ...). Le résultat d'un produit simplement contracté est un tenseur d'ordre $n + m - 2$.

▷ Le produit doublement contracté (:)

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un scalaire :

$$s = \boldsymbol{a}^{(2)} : \boldsymbol{b}^{(2)} \Leftrightarrow s = a_{ij}b_{ij} \Leftrightarrow s = a_{ij}c_{ji} \Leftrightarrow s = \mathrm{Trace}(\boldsymbol{a}^{(2)} \cdot \boldsymbol{c}^{(2)}) \tag{11}$$

avec $\boldsymbol{c}^{(2)}$ est la transposée de $\boldsymbol{b}^{(2)}$: $\quad \boldsymbol{c}^{(2)} = {}^{T}\boldsymbol{b}^{(2)} \Leftrightarrow b_{ij} = c_{ji}$.

(Explication : Soit $\boldsymbol{d}^{(2)} = \boldsymbol{a}^{(2)} \cdot \boldsymbol{c}^{(2)} \Leftrightarrow d_{ij} = a_{ik}c_{kj}$ or $\mathrm{Trace}(\boldsymbol{d}^{(2)}) = dii = a_{ik}c_{ki}$)
Remarque : Le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre 2 anti-symétrique et un tenseur d'ordre 2 symétrique donne toujours le tenseur nul.

Le produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 2 :

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{A}^{(4)} : \boldsymbol{a}^{(2)} \Leftrightarrow b_{ij} = A_{ijkl}a_{kl} \tag{12}$$

Soit n l'ordre du premier tenseur et m l'ordre du second. Le résultat d'un produit doublement contracté est un tenseur d'ordre $n + m - 4$.